CORRECTIONS Déclic Maths

Fonctions polynômes du second degré. Equations

Correction des exercices bilan page 37

• **Bilan** $\boxed{1}$

1) On a $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 2$
f est un polynôme du second degré si et seulement si le coefficient du terme en x^2 est non nul ; ici $m - 1 \neq 0$ donc $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) (a) -1 est une racine $\Leftrightarrow f(-1) = 0$

$$\Leftrightarrow m - 1 + 2m + m + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4m = -1$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{-1}{4}$$

(b) f admet une racine unique si et seulement si son discriminant est nul.
ici $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m-1)(m+2) = 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4(m^2 + m - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow m = 2$$

(c) f admet deux racines distinctes si et seulement si son discriminant est strictement positif.
ici $\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m-1)(m+2) > 0$

$$\Leftrightarrow -4(m-2) > 0$$
$$\Leftrightarrow m - 2 < 0$$
$$\Leftrightarrow m < 2$$

(d) f se factorise par $x - 2$ si et seulement si 2 est une racine.
$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4(m-1) - 4m + m + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4m - 4 - 4m + m + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow m = 2$$

(e) La somme des racines vaut $S = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{m-1} = 6$
$2m = 6m - 6$
$m = \frac{3}{2}$

(f) Le produit des racines vaut $P = \frac{c}{a} = \frac{m+2}{m-1} = -1$
$m + 2 = -m + 1$
$m = -\frac{1}{2}$

- **Bilan** $\boxed{3}$

1) Après avoir calculer le discriminant, on trouve que -2 et $\dfrac{1}{2}$ sont les racines de f, donc $f(x) = 2(x+2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = (x+2)(2x-1)$.

Après avoir calculer le discriminant, on trouve que 4 et $\dfrac{1}{2}$ sont les racines de g, donc $g(x) = 2(x-4)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) = (x-4)(2x-1)$.

2) $$\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{(x+2)(2x-1)} + \frac{1}{(x-4)(2x-1)} = \frac{1(x-4)+x(x+2)}{(x+2)(x-4)(2x-1)}$$
$$= \frac{x^2+3x-4}{(x+2)(x-4)(2x-1)} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x+2)(x-4)(2x-1)}$$

Donc l'équation $\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{g(x)} = 0$ admet deux solutions -4 et 1.

- **Bilan** $\boxed{5}$

1) En notant p le prix initial demandé aux élèves, on a :
$x \times p = 168$ pour la première version et
$(x-2)(p+0,40) = 168$
On a donc $p = \dfrac{168}{x}$ et $p = \dfrac{168}{x-2} - 0,4$

2) Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues qui se ramène à une équation du second degré. On a alors : $0,4x^2 - 0,8x - 336 = 0$
On trouve $\Delta = 538,24$ et les deux solutions sont -28 et 30. Seule la solution positive n'est envisageable. Il y a donc 30 élèves dans la classe.

- **Bilan** $\boxed{6}$

1) **a)** On pose $AM = x$ donc $AN = 6 - x$.
L'aire du triangle vaut ici $\dfrac{AM \times AN}{2}$
On cherche à résoudre $\dfrac{x(6-x)}{2} = 10$ soit $-x^2 + 6x - 20 = 0$ dont le discriminant est négatif. Il n'y a donc pas un tel triangle d'aire 10 cm^2

b) On cherche à résoudre $\dfrac{x(6-x)}{2} = 3$ soit $-x^2 + 6x - 6 = 0$ dont le discriminant vaut 12. Les deux solutions sont $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$ (les rôles de AM et AN s'échangent)

2) **a)** $x \in [0; 6]$

b) D'après le théorème de Pythagore, on a $f(x) = x^2 + (6-x)^2 = 2x^2 - 12x + 36$

3) **a)** On résout $f(x) = 16$ soit $2x^2 - 12x + 20 = 0$ dont le discriminant est négatif. Donc il n'y a pas de tel triangle AMN avec MN=4 cm.

b) On résout $f(x) = 25$ soit $2x^2 - 12x + 11 = 0$ dont le discriminant vaut 56. Il y a donc deux solutions $AM = \dfrac{6-\sqrt{14}}{2}$ et $AN = \dfrac{6+\sqrt{14}}{2}$ et la deuxième en échangeant les rôles de AM et AN.

4) **a)** $f(x)=2x^2-12x+36=2(x^2-6x)+36=2(x-3)^2-18+36=2(x-3)^2+18$

b) $f(x)-f(3)=f(x)-18=2(x-3)^2$ qui est toujours positif ou nul.
Donc $f(x)\geqslant f(3)$

c) On a donc $MN^2\geqslant 18$ comme un longueur est positive $MN\geqslant 3\sqrt{2}$.
On a dans ce cas $AM=AN=3$ et le triangle est isocèle rectangle en A.

- **Bilan** $\boxed{8}$

1) Les coordonnées d'un point de la courbe représentative d'une fonction f sont de la forme $(x;f(x))$; ici A $(a;\dfrac{1}{a})$

2) Le point I est le milieu du segment [AB].
$x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}$ donc $x_B=2x_I-x_A=\dfrac{7}{2}-a$
$y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}$ donc $y_B=2y_I-y_A=\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{a}$
On a bien $B\left(\dfrac{7}{2}-a;\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{a}\right)$

3) Le point B appartient à la courbe $\mathscr{C}$ si et seulement si ses coordonnées vérifient $y_B=\dfrac{1}{x_B}$. D'après la question précédente : $\dfrac{1}{x_B}=\dfrac{1}{\frac{7-2a}{2}}=\dfrac{2}{7-2a}$

$$\begin{aligned}B\in\mathscr{C}&\Leftrightarrow \frac{2}{7-2a}=\frac{7a-3}{3a}\\&\Leftrightarrow 6a=(7-2a)(7a-3)\\&\Leftrightarrow -14a^2+49a-21=0\\&\Leftrightarrow 2a^2-7a+3=0=0\end{aligned}$$

4) On a $\Delta=25$ donc deux solutions $a_1=\dfrac{1}{2}$ et $a_2=3$.
Or ces deux abscisses sont telles que $\dfrac{\frac{1}{2}+3}{2}=\dfrac{7}{4}=x_I$.
Donc il existe deux points A et B appartenant à le courbe $\mathscr{C}$ dont le milieu du segment $[AB]$ est le point I.

Fonctions polynômes du second degré, parabole

Correction des exercices bilan page 67

- **Bilan** $\boxed{1}$

1) On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$

a) Le discriminant du trinôme vaut $\Delta = 36 - 3 \times 4^2 = -12$.
Il est négatif, donc le trinôme est toujours du signe de a, ici négatif.
Ainsi, pour tout x, $f(x) < 0$.

b) Graphiquement, cela signifie que la courbe se situe en dessous de l'axe des abscisses.

2) $f(x) = -3(x^2 - 2x) - 4 = -3[(x-1)^2 - 1] - 4 = -3(x-1)^2 + 3 - 4 = -3(x-1)^2 - 1$

3) La forme canonique nous permet d'affirmer que l'axe de symétrie est la droite d'équation $x = 1$ et que le sommet a pour coordonnées $(1; -1)$.

4) **a)**

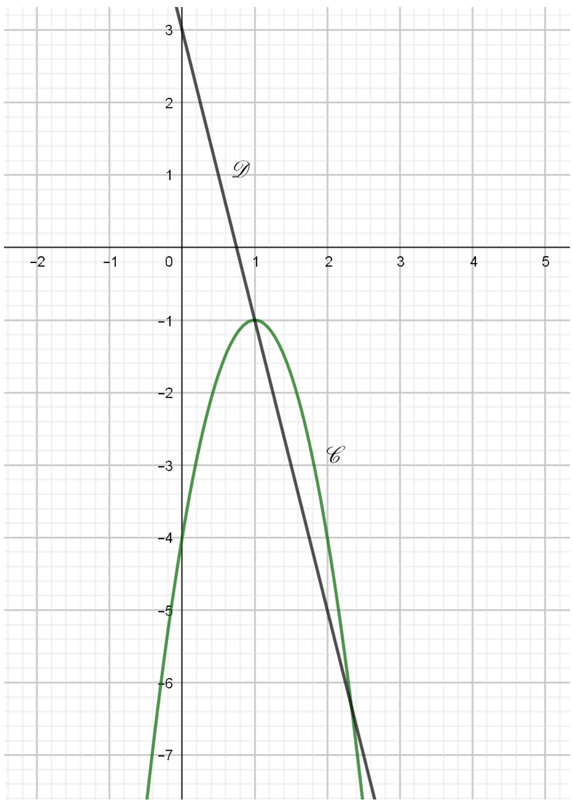
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	-1	↘	

b) En étudiant le tableau de variations, on peut dire que :
pour $m < -1$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions ;
pour $m = -1$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution ;
pour $m > -1$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution.

5) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = -4$ revient à résoudre l'équation $f(x) = -4$.
$-3x^2 + 6x - 4 = -4$
$-3x^2 + 6x = 0$
$3x(-x + 2) = 0$
Cette équation produit admet deux solutions 0 et 2 qui sont les abscisses des points d'intersection. On peut vérifier que $f(0) = -4$ et $f(2) = -4$. Les points d'intersection sont donc $(0; -4)$ et $(2; 4)$.

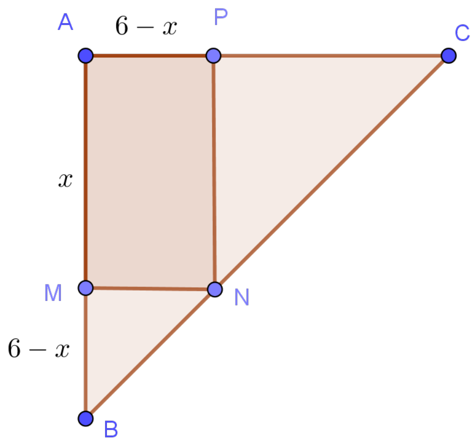
6) Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite d'équation $y = -4x + 3$, on étudie le signe de $f(x) - (-4x + 3)$.
$f(x) - (-4x + 3) = -3x^2 + 6x - 4 + 4x - 3 = -3x^2 + 10x - 7$.
Les racines de ce trinôme sont 1 et $\dfrac{7}{3}$ et ce trinôme est du signe de a, ici négatif, à l'extérieur des racines.
Donc $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite sur $]1; \dfrac{7}{3}[$ et
en dessous de la droite sur $]-\infty; 1[\cup]\dfrac{7}{3}; \infty[$

7)



- **Bilan** $\boxed{3}$

1) On a la figure suivante :



a) Le point M appartient au segment [AB], donc $x \in [0;6]$

b) Les triangles BMN et BAC ont deux angles égaux, donc ils sont semblables. Donc BMN est aussi isocèle rectangle, ainsi $MB = MN = AP = 6 - x$.
Donc $A(x) = AM \times AP = x(6-x) = -x^2 + 6x$

2) $A(x) \geqslant 8 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 \geqslant 0$
Les racines de ce trinôme sont 2 et 4.
Le trinôme est du signe de a, ici négatif à l'extérieur des racines.
Donc $A(x) \geqslant 8$ pour $x \in [2;4]$

3) $A(x) \leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{AB \times AC}{2}$

$A(x) \leqslant \dfrac{1}{4} \times \dfrac{36}{2}$

$-x^2 + 6x - \dfrac{9}{2} \leqslant 0$

Le discriminant de ce trinôme vaut 18.

Les racines de ce trinôme sont $\dfrac{-6 - 3\sqrt{2}}{-2} = 3 + 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $3 - 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Le trinôme est du signe de a, ici négatif à l'extérieur des racines.

Donc $A(x) \leqslant \dfrac{9}{2}$ pour $x \in \left[0; 3 - 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[3 + 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 6\right]$

4) $A(x) = -x^2 + 6x = -(x^2 - 6x) = -[(x-3)^2 - 9] = -(x-3)^2 + 9$

Donc on a le tableau de variations suivant :

x	0		3		6
f		↗	9	↘	

5) Donc on lit que le maximum est atteint pour $x = 3$.

Dans ce cas M est au milieu de [AB] et AMNP est un carré.

• Bilan $\boxed{5}$

1) Les coordonnées du point M sont $(x; 4 - x^2)$ et celles de N $(-x; 4 - x^2)$.

Ainsi le périmètre de MNPQ s'écrit : $p(x) = 2 \times 2x + 2 \times f(x) = 4x + 8 - 2x^2$

2) $p(x) = -2x^2 + 4x + 8 = -2(x^2 - 2x) + 8 = -2[(x-1)^2 - 1] + 8 = -2(x-1)^2 + 10$

3) Donc le trinôme admet un maximum en 1 qui vaut 10. Lorsque l'abscisse du point M vaut 1 le périmètre du rectangle MNPQ est maximum et vaut 10.

• Bilan $\boxed{7}$

On considère la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x + 1}$

1) Etudions le signe de la fonction f.

$x^2 - x + 1$ a pour discriminant -3,

donc ce trinôme n'admet pas de racine et est toujours du signe de a, ici positif.

De plus sur l'intervalle $]-1; +\infty[$, on a $x + 1 > 0$.

Donc pour $x \in]-1; +\infty[$,on a :$f(x) > 0$ et donc la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses.

2) $f(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - x + 1 - x - 1}{x + 1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-2)}{x + 1} \leqslant 0$

x	-1		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{x(x-2)}{x+1}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S} = [0;2]$

La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite d'équation $y = 1$ pour x appartenant à l'intervalle $[0;2]$.

3) $f(x)-(-x+3) = \dfrac{x^2-x+1-(-x+3)(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2-x+1+x^2-2x-3}{x+1} = \dfrac{(2x+1)(x-2)}{x+1}$

La courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de la droite Δ d'équation $y = -x+3$ si et seulement si $f(x)-(-x+3) < 0$

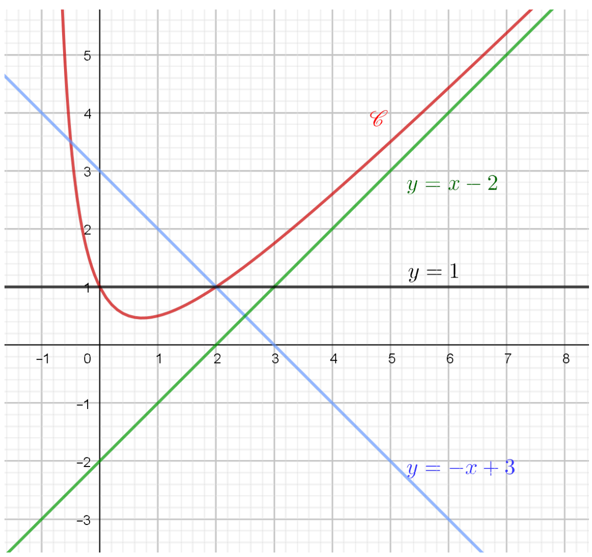
x	-1		$-\dfrac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$	
$\dfrac{(2x+1)(x-2)}{x+1}$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathscr{S} =]-\dfrac{1}{2};2[$.

La courbe est en dessous de la droite Δ pour x appartenant à l'intervalle $]-\dfrac{1}{2};2[$.

4) $f(x)-(x-2) = \dfrac{x^2-x+1-(x-2)(x+1)}{x+1} = \dfrac{3}{x+1}$ Cette fraction est toujours positive, donc la courbe est toujours au dessus de la droite $\mathscr{D}$

On peut vérifier graphiquement les résultats précédents sur le grapique ci-dessous :



$\boxed{\textbf{Nombre dérivé – Applications}}$

Correction des exercices bilan page 99

• **Bilan** $\boxed{1}$

1) Si $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ est est $\tau(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

2) Soit $h \neq 0$; on a $f(2+h) = 3(2+h)^2 - (2+h) + 1$,
soit $f(2+h) = 3(4+4h+h^2) - 2 - h + 1 = 3h^2 + 11h + 11$.
D'autre part, $f(2) = 3 \times 2^2 - 2 + 1 = 11$, d'où $\tau(h) = \dfrac{3h^2 + 11h + 11 - 11}{h}$, soit $\tau(h) = \dfrac{h(3h+11)}{h} = 3h + 11$.

3) Lorsque h tend vers 0, $\tau(h)$ tend vers la limite finie $3 \times 0 + 11 = 11$, ce que l'on peut noter $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = 11$; cela prouve que f est dérivable en 2 et que le nombre dérivé de f en 2 est $f'(2) = 11$.

• **Bilan** $\boxed{2}$

1) **a)** $f(x)$ est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse x, donc :
$f(-2) = -1$; $f(-1) = 0$ et $f(1) = -1$.

b) $f'(a)$ est la pente de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a, donc :
$f'(-2) = 0$; $f(-1) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(1) = -4$.

2) $\mathscr{T}_1 : y = -1$; $\mathscr{T}_2 : y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$ et $\mathscr{T}_3 : y = -4x + 3$.

• **Bilan** $\boxed{3}$

1) **a)** Faux. Pour tout réel a, $f'(a) = -2$.

b) Vrai.

c) Vrai. Notons que, comme f est affine, sa représentation graphique est une droite d. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, soit $y = -2(x-a) - 2a + 5$, ce qui équivaut à $y = -2x + 5$. On vient de prouver une quasi-évidence : la tangente à la droite d en un point quelconque est la droite d elle-même !

2) **a)** Vrai.

b) Faux. Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -1 est $g'(-1) = 2 \times (-1)^2 = 3$, donc $g'(-1) \neq -3$.

c) Vrai. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 2 a pour équation $y = g'(2)(x-2) + g(2)$, soit $y = 3 \times 2^2(x-2) + 8$, ce qui équivaut bien à $y = 12x - 16$.

3) Rappelons que $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $h' : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

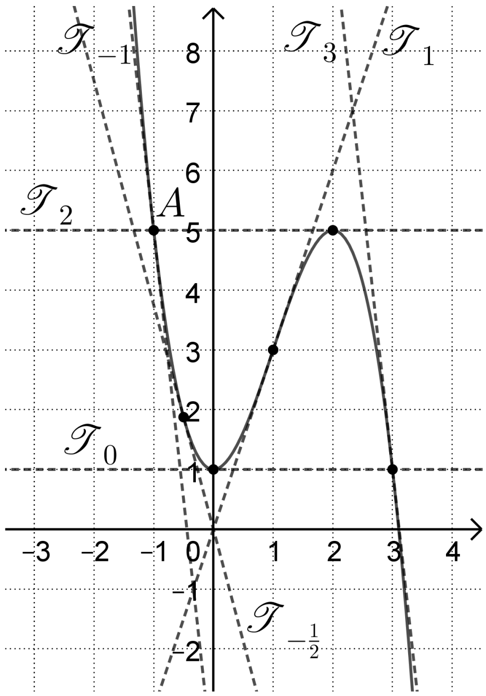
a) Vrai. La tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse a [resp. $-a$] a pour pente $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ $\left[\text{resp. } -\dfrac{1}{(-a)^2} = -\dfrac{1}{a^2}\right]$. Les tangentes ayant la même pente $\left(= -\dfrac{1}{a^2}\right)$, elles sont bien parallèles.

b) Vrai. $h'(2) = -\dfrac{1}{2^2} = -\dfrac{1}{4}$.

c) Vrai. La tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse -1 a pour équation réduite $y = h'(-1)(x-(-1)) + h(-1)$. Or $h(-1) = \dfrac{1}{-1} = -1$ et $h'(-1) = -\dfrac{1}{(-1)^2} = -1$, donc $\mathscr{T}$ a pour équation $y = -(x+1) - 1$, soit $y = -x - 2$.

• Bilan $\boxed{4}$

Si $a \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{T}_a$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.



1) $\mathscr{T}_a$ est parallèle à l'axe (Ox) si et seulement si la pente de $\mathscr{T}_a$ est nulle, ce qui équivaut à $f'(a) = 0$.
Or $f'(a) = 0 \iff -3a^2 + 6a = 0 \iff 3a(-a+2) = 0 \iff (a = 0 \text{ ou } a = 2)$.
Les tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à l'axe (Ox) sont donc $\mathscr{T}_0$ et $\mathscr{T}_2$.

2) **a)** $\mathscr{T}_{-1}$ a pour équation $y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$.
Or $f(-1) = -(-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 1 = 5$ et $f'(-1) = -3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) = -9$, donc $\mathscr{T}_{-1}$ a pour équation $y = -9(x+1) + 5$, soit $y = -9x - 4$.

b) $\mathscr{T}_a // \mathscr{T}_{-1} \iff$ les pentes de $\mathscr{T}_a$ et $\mathscr{T}_{-1}$ sont égales $\iff f'(a) = f'(-1)$, ce qui équivaut à $-3a^2 + 6a = -9$, puis à $a^2 - 2a - 3 = 0$. Il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue a dont les solutions sont $a_1 = -1$ et $a_2 = 3$ (détails des justifications laissés au lecteur). Ainsi les tangentes à $\mathscr{C}_f$ parallèles à $\mathscr{T}_{-1}$ sont $\mathscr{T}_{-1}$ elle-même et $\mathscr{T}_3$.
$\mathscr{T}_3$ a pour équation $y = f'(3)(x-3) + f(3)$, soit $y = -9(x-3) + 1$, ce qui équivaut à $y = -9x + 28$.

3) **a)** $\mathscr{T}_a$ a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, soit $y = (-3a^2+6a)(x-a)-a^3+3a^2+1$, ce qui équivaut à $y = (-3a^2+6a)x + 3a^3 - 6a^2 - a^3 + 3a^2 + 1$, et finalement $\mathscr{T}_a$ a bien pour équation $y = (-3a^2+6a)x + 2a^3 - 3a^2 + 1$.

b) $\mathscr{T}_a$ passe par l'origine si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle, ce qui équivaut (voir question précédente) à $2a^3 - 3a^2 + 1 = 0 \ \ (\star)$.
Or $(a-1)^2(2a+1) = (a^2-2a+1)(2a+1) = 2a^3+a^2-4a^2-2a+2a+1 = 2a^3-3a^2+1$, donc $(\star) \iff (a-1)^2(2a+1) = 0$.

c) On a $(\star) \iff (a-1=0 \text{ ou } 2a+1=0) \iff (a = 1 \text{ ou } a = -\dfrac{1}{2})$ donc les tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère sont $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_{-\frac{1}{2}}$.
On a $f'(1) = -3\times 1^2+6\times 1 = 3$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+6\times\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{15}{4}$, d'où $\mathscr{T}_1 : y = 3x$ et $\mathscr{T}_{-\frac{1}{2}} : y = -\dfrac{15}{4}x$.