# Fonctions trigonométriques

Correction des exercices bilan page 235

## • Bilan 1

1) Dans cet ordre, les points F, G, H, K, L, I, A, B, J, C, D et E sont associés aux réels $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{6}$; $0$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\pi$.

   Ces réels sont les mesures principales, en radians, des angles orientés $\widehat{\text{IOF}}$, $\widehat{\text{IOG}}$, etc…

2) a) Tous les nombres égaux à un nombre entier de fois $2\pi$ près ont la même image sur le cercle trigonométrique donc le point associé à $\frac{17\pi}{6}$ est aussi celui associé à $\frac{17\pi}{6}-2\pi$, soit $\frac{5\pi}{6}$ et il s'agit donc du point D.

   b) De même, $-\frac{11\pi}{6}+2\pi=\frac{\pi}{6}$ pour le point A

   c) $\frac{10\pi}{3}=\frac{(12-2)\pi}{3}=4\pi-\frac{2\pi}{3}$ pour le point G

   d) $-\frac{11\pi}{3}=\frac{(1-12)\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-4\pi$ pour le point B

3) Deux réels sont associés au même point si, et seulement si, leur différence est un nombre entier de fois $2\pi$

   a) $\frac{28\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=9\pi$ donc il s'agit des points G et B, diamétralement opposés, dans cet ordre.

   b) $\frac{13\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=6\pi$, les deux ont pour image le point J sur le cercle trigonométrique

   c) $\frac{299\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=50\pi$, les deux ont pour image le point L

   d) $\frac{17\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=4\pi$, les deux nombres sont associés au point M, intersection de la droite d'équation $y=x$ et du cercle trigonométrique.

4) $F\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right);\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ donc $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et de même nous obtenons :

   $G\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad H(0;-1)$ $\quad K\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad L\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$ $\quad I(1;0)$

   $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\quad B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad J(0;1)$ $\quad C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $\quad D\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ $\quad E(-1;0)$

   Notons que le cosinus et sinus sont parfaitement exacts mais pas le résultat attendu.

• Bilan $\boxed{3}$

1) Pour tout réel $a$, $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ donc $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$

D'autre part, $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$

Donc $\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$ et donc $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

2) Alors, $\cos^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1+\cos(\pi/4)}{2} = \dfrac{1+\sqrt{2}/2}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin^2 \dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos^2 \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\dfrac{\pi}{8} \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$ sont tous les deux positifs.

Et donc $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, notre ami Archimède savait déjà cela.

• Bilan $\boxed{4}$

1) a) $\cos\dfrac{\pi}{2} + \cos\dfrac{\pi}{4} = 0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ alors que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\dfrac{\pi}{3} - \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ alors que $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin\dfrac{2\pi}{3} + \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ alors que $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

d) $\sin\dfrac{2\pi}{3} - \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ alors que $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{2} = 1$

2) D'après le contre exemple précédent, les égalités que je n'ose écrire à nouveau, et dont la validité sont l'objet de l'exercice, sont en général fausses, et même presque toujours fausses. Les fonctions trigonométriques ne sont pas des fonctions linéaires, qui sont les seules fonctions ultra-privilégiées par lesquelles l'image de la somme est toujours égale à la somme des images.