

Entrée en 1^e année de CPGE : exercices à chercher pour la rentrée

1 Calculs algébriques

Dans les calculs ci-dessous, effectuer les opérations avec les fractions les plus simples possibles et exprimer les résultats sous forme de fraction avec un dénominateur entier lorsque cela est possible.

Exemple : $\frac{1}{48} - \frac{1}{80}$ ne se fera pas avec la calculatrice ni sous la forme $\frac{80-48}{48 \times 80}$. Puisque 48 et 80 ont un multiple commun bien plus petit que leur produit :

$$\frac{1}{6 \times 8} - \frac{1}{8 \times 10} = \frac{5-3}{8 \times 3 \times 2 \times 5} = \frac{1}{120}$$

Vous présenterez les calculs intermédiaires sur votre copie.

Calcul 1 : Simplifier $A = \frac{1}{120} + \frac{1}{45} + \frac{3}{20} + \frac{1}{36}$.

Calcul 2 : Lors des calculs de probabilités conditionnelles, on peut être amené à calculer une expression de la forme

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_3)P(A_3)}$$

Nous vous proposons deux exemples de calculs apparaissant en probabilités.

Simplifier : $p = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{1}{50}}{\frac{4}{10} \times \frac{1}{50} + \frac{2}{3} \times \frac{15}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{34}{50}}$

Simplifier : $q = \frac{\frac{2}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{100}}{\frac{2}{10} \times \frac{4}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{10}}$

Calcul 3 : Simplifier les fractions suivantes, sachant que a, b, c, d désignent des réels non nuls :

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} ; \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} ; \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$$

Calcul 4 : Fractions de nombres non entiers. Simplifier :

$$A = \frac{1}{u^2 + 3u + 2} + \frac{1}{u^2 - 1} + \frac{-2}{u^2 + u} - \frac{1}{u^2 + u - 2}$$

$$B = \frac{2(x-1)}{9x^2 - 4} - \frac{2-x}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{x+4}{9x^2 - 4}$$

Calcul 5 : Racines et expressions conjuguées. Écrire avec un dénominateur **entier**.

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} ; \frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} ; \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} ; \frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \frac{3\sqrt{5}+1}{2-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

Calcul 6 : Exprimer avec encore un dénominateur entier (i désigne l'imaginaire pur de carré égal à -1).

$$\frac{1+i}{i} ; \frac{i-4}{2i} ; \frac{3+4i}{5-7i} ; \frac{4-3i}{i-1} ; \frac{5-3i}{(4-i)(1+3i)}$$

$$\frac{(5+2i)(2-3i)}{(i-3)(3i-4)} ; \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} + 2 \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} - \frac{(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}$$

Calcul 7 : Trouver les parties réelle et imaginaire, toujours avec dénominateur entier ! On utilisera le module et l'argument.

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} ; z_2 = \frac{i}{2i\sqrt{3}-2} ; z_1 + z_2$$

$$z_1 z_2 ; z_1(z_2)^{-1} ; (z_1)^6(z_2)^{12} ; (z_1)^8(z_2)^{-3} ; \frac{(1+i)^3}{(1+i\sqrt{3})^4}$$

Calcul 8 : Simplifier les expressions ci-dessous sachant que a, x, y, z désignent des réels et que a est strictement positif.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^5 \left(\frac{6}{5}\right)^{4+y} ; \frac{a^{x+y} e^{(x-y)\ln(a)}}{a^2 a^{(-2x-4)}} ; \frac{6^{x-2} 3^{2x+2}}{12^{2x-1}} ; \frac{30^{3-x}}{6^{2-x} 5^{x+1}}$$

$$(-3)^{-2} \cdot 2^4 ; (-xy^2) \cdot (-yz^2) \cdot (-zx^2) ; \left(-\frac{x}{y}\right)^2 \cdot (-y)^3$$

Calcul 9 :

1. A l'aide d'un développement, démontrer les formules suivantes :

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad \text{et} \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$\sqrt{\sqrt{3}} + 2\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{243} \quad ; \quad \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

Calcul 10 : On rappelle le sens de la notation factorielle :

$$0! = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad (n + 1)! = n! \times (n + 1)$$

On définit maintenant $u_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n + 1)!}$.

Exprimer u_{n+1} puis simplifier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ainsi que l'écart relatif $\left| \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} \right|$.

Calcul 11 : Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$.

Quelle est la somme des deux solutions ? où la trouve-t-on dans les coefficients de la fonction trinôme ?

Calcul 12 : ... et avec un degré de plus.

Pour la fonction f définie sur \mathbb{C} par $f(z) = z^3 + [(i-1)+4]z^2 + [8-4(1-i)]z + 8(i-1)$, déterminer une factorisation de f et ses racines complexes. Où trouve-t-on la somme des trois racines ? le produit des trois racines ? que représente le dernier coefficient ?

Calcul 13 : Factoriser les trinômes suivants sans utiliser le discriminant :

$$x^2 + 3x \quad ; \quad x^2 - 9 \quad ; \quad 4x^2 + 25 \quad ; \quad 49x^2 + 21x + \frac{3}{2} \quad ; \quad x^2 + 5x + 6$$

Pour le dernier, on donne l'indication suivante : les racines sont entières.

2 Calculs analytiques

Exercice 1 : Simplifier chacune des expressions suivantes :

$$A = \frac{e^3 \times e^{-1}}{e^7} \quad ; \quad B = \frac{(e^{-2})^3 \times e^{-5}}{(e^2)^2} \quad ; \quad C = \frac{1}{e^{0,3}} \times \frac{1}{e}$$

$$D = e^{\frac{1}{2} \ln(8)+1} \quad ; \quad E = \frac{e^{2 \ln(3)}}{e^{3 \ln(2)}} \quad ; \quad F = \ln \left(\frac{e^5}{e^3} \right) \quad ; \quad G = \ln(\sqrt{e}) - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}} \right)$$

Exercice 2 : Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} e^{3x+1} = e^x & \text{(b)} e^{x(x+1)} = 1 & \text{(c)} e^x = \frac{1}{e^{x+1}} \\ \text{(d)} e^{3x-1} \leq e^{2x} & \text{(e)} e^{2x} - e^{x+1} \leq 0 & \text{(f)} e^{x^2} > e^{2x^2-x} \\ \text{(g)} e^{3x-1} = 3 & \text{(h)} e^{1/x} = 2 & \text{(i)} e^{2x} - 2e^{-2x} = 1 \\ \text{(j)} \ln(1 + 3x) = \ln(x + 1) & & \text{(k)} \ln(x - 1) + \ln(2 - x) = \ln(6x) \\ \text{(l)} \ln(2x + 1) = \ln(x^2 - 1) & & \end{array}$$

Indication : pour (i), on pourra poser $X = e^{2x}$.

Exercice 3 : Pour chacune des fonctions numériques réelles suivantes, donner son domaine de définition, préciser en quels points elle est dérivable et calculer sa dérivée en ces points :

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} x \mapsto x^3 - x^2 & \text{(b)} x \mapsto \frac{x^2 - 3}{x + 1} & \text{(c)} x \mapsto xe^{-x} \\ \text{(d)} x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x - 1} & \text{(e)} x \mapsto \ln(x^2 + x + 1) & \text{(f)} x \mapsto \frac{(2x + 1)^3}{x + 1} \\ \text{(g)} x \mapsto e^x \sqrt{1 - x} & \text{(h)} x \mapsto \frac{e^x + 1}{e^x - 1} & \text{(i)} x \mapsto e^{x^2-x} + \frac{3}{4}x^4 \\ \text{(j)} x \mapsto e^{\omega x} - x, \text{ où } \omega \text{ est un réel fixé.} & & \end{array}$$

Indication : utiliser la dérivée de fonctions des types suivants : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$, $x \mapsto (u(x))^n$, $x \mapsto e^{u(x)}$ et $x \mapsto \ln(u(x))$, où n est un entier relatif non nul.

Exercice 4 : Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} I = \mathbb{R}, f : x \mapsto 2x & \text{(b)} I = \mathbb{R}, f : x \mapsto 6x^{11} - 8x^3 \\ \text{(c)} I =]0; +\infty[, f : x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2} & \text{(d)} I =] - \infty; 2[, f : x \mapsto \frac{1}{x - 2} \\ \text{(e)} I =] - \frac{3}{2}; +\infty[, f : x \mapsto \frac{1}{(2x + 3)^5} & \text{(f)} I =]1; +\infty[, f : x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{array}$$

Exercice 5 : On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et qu'il existe une fonction a continue sur I vérifiant $f'(t) = a(t)f(t)$ pour tout t dans I .

- Rappeler pourquoi a admet au moins une primitive sur I . On note A une telle primitive.
- Démontrer que $F : t \mapsto f(t)e^{-A(t)}$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- En déduire qu'il existe un réel K tel que, pour tout réel t appartenant à I , $f(t) = Ke^{A(t)}$.
- Application pratique : dans chacun des cas suivants, déterminer toutes les fonctions f vérifiant l'égalité proposée sur l'intervalle I indiqué :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} f'(t) = 3f(t), I = \mathbb{R} & \text{(b)} f'(t) = -\frac{1}{2}f(t), I = [0, +\infty[\\ \text{(c)} f'(t) = 2tf(t), I = \mathbb{R} & \text{(d)} f'(t) = \frac{1}{t}f(t), I = [1, 2] \\ \text{(e)} f'(t) = -\frac{1}{t}f(t), I =] - \infty, 0[\end{array}$$

3 Trigonométrie

Exercice 6 : Dans cet exercice, on considère la fonction $\tan : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, dite fonction tangente.

- Déterminer son domaine de définition.
- Rappeler les formules d'addition du cosinus et du sinus.
- Soient a et b deux réels. Démontrer les formules ci-dessous :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad \text{et} \quad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b},$$

en précisant pour quels réels a et b ces formules sont valables.

- Tracer les graphes des fonctions \sin et \cos sur une même figure. Expliquer comment on interprète les formules suivantes sur les graphes des deux fonctions : pour tout réel x ,

$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad ; \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

- Résoudre l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$2 \cos(2x) + 4 \cos(x) + 3 = 0.$$

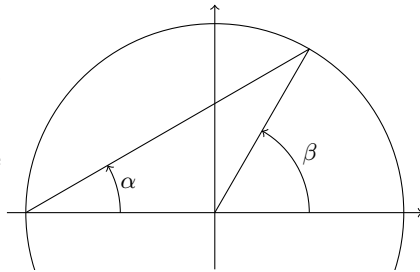
Exercice 7 : Expliquer les formules ci-dessous à l'aide du cercle trigonométrique :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \quad ; \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x \quad ; \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\cos\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin x \quad ; \quad \tan(x + \pi) = \tan x \quad ; \quad \tan(-x) = -\tan x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad ; \quad \cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

On démontrera la dernière formule pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ après avoir remarqué que, dans la figure ci-contre, l'angle β est le double de l'angle α :



Exercice 8 : Soient a et b deux réels. On pose $u = \frac{a+b}{2}$ et $v = \frac{a-b}{2}$.

- Calculer $u+v$ et $u-v$. En déduire les formules suivantes :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

- Montrer les formules suivantes :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)]$$

- Résoudre les équations suivantes d'inconnue x réelle :

$$(1) \sin(2x) + \sin(6x) = \sin(4x) \quad ; \quad (2) \cos(x) \cos(7x) = \cos(3x) \cos(5x)$$

Exercice 9 :

- Grâce au cercle trigonométrique, préciser à quelle condition sur les réels x et y , on a :

$$(1) \cos x = \cos y \quad ; \quad (2) \sin x = \sin y.$$

- Résoudre les équations suivantes d'inconnue réelle θ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$(1) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3\theta) \quad ; \quad (2) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(3\theta)$$

Exercice 10 : Utilisation de nombres complexes en trigonométrie. Dans cet exercice, on fixe deux réels non nuls a et b .

- Pour tout réel θ , montrer que : $a \cos \theta + b \sin \theta = \operatorname{Re} [(a - ib)e^{i\theta}]$.
- Soit $z = a + ib$, r le module de z et φ un argument de z . Montrer que, pour tout réel θ , on a :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi).$$

- Utiliser cette transformation pour déterminer tous les réels x de l'intervalle $[-\pi; \pi]$ tels que $\cos x - \sqrt{3} \sin x \leq 1$.